ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 232

Α2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

Α3. α . Σ , β. Σ , γ. Σ , δ. Λ , ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z = x + yi$

$|z| = |z-2i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$

$y = 1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι η ευθεία $y = 1$

Β2.

$|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$ και επειδή $y = 1$ θα είναι $x = \pm 1$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $z = 1 + i$ ή $z = -1 + i$

Β3.

$z_1^4 + z_2^4 = (1+i)^4 + (-1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 + [(-1+i)^2]^2 =$

$= (1 + 2i - 1)^2 + (1 - 2i - 1)^2 =$

$= 4i^2 + 4i^2 =$

$= -4 - 4 = -8$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f'(x) = 3x^2 - 3\cdot\frac{1}{x}$ και $f''(x) = 6x + 3\frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$

Άρα η f είναι κυρτή.

Γ2.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3 - 3\ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

Άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας y΄y, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Γ3.

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $f(x) - 2 = 0$

Έστω $g(x) = f(x) - 2$, $x > 0$

Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ με $g(1) = f(1) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

και $g(e) = f(e) - 2 = e^3 - 3\ln e - 2 = e^3 - 5 > 0$

Άρα $g(1)g(e) < 0$, επομένως με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,\ e)$ ώστε $g(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\xi) - 2 = 0$

Ακόμα $g'(x) = 3x^2 - 3\cdot\frac{1}{x} = \frac{3x^3 - 3}{x} = \frac{3\left(x^3 - 1\right)}{x}$ με

Για κάθε $x > 1 \;\Rightarrow\; x^3 > 1^3 \;\Rightarrow\; x^3 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; g'(x) > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ e]$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$g'(x) = e^x\left(f(x) - x + 1\right) + e^x\left(f'(x) - 1\right) = e^x\left(f(x) + f'(x) - x\right) =$

(λόγω της υπόθεσης) $= e^x\left(f(x) - f(x) + x - x\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $g(x) = c$ στο $\mathbb{R}$

Δ2.

$g(x) = c \;\Leftrightarrow\; e^x\left(f(x) - x + 1\right) = c$

Για $x = 0$ έχουμε $e^0\left(f(0) - 0 + 1\right) = c \;\Leftrightarrow\; c = 1$

Οπότε $e^x\left(f(x) - x + 1\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; f(x) - x + 1 = e^{-x}$

$f(x) = e^{-x} + x - 1,\quad x \in \mathbb{R}$

Δ3.

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -e^{-x} + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -e^{-x} + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} < 1 \;\Leftrightarrow\; x > 0$

$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; -e^{-x} + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} > 1 \;\Leftrightarrow\; x < 0$

Επομένως για $x = 0$ η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \ge 0$

Δ4.

Επειδή $f(0) = 0$ και η f σαν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής, σημείο τομής της C_f με το άξονα των x είναι $O(0\,,\,0)$. Όμως, για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τον άξονα των x.

Όπως είδαμε, στο $[0\,,\,1]$ είναι $f(x) \ge 0$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο

με $E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1)dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{e-2}{2e}$ τ. μονάδες